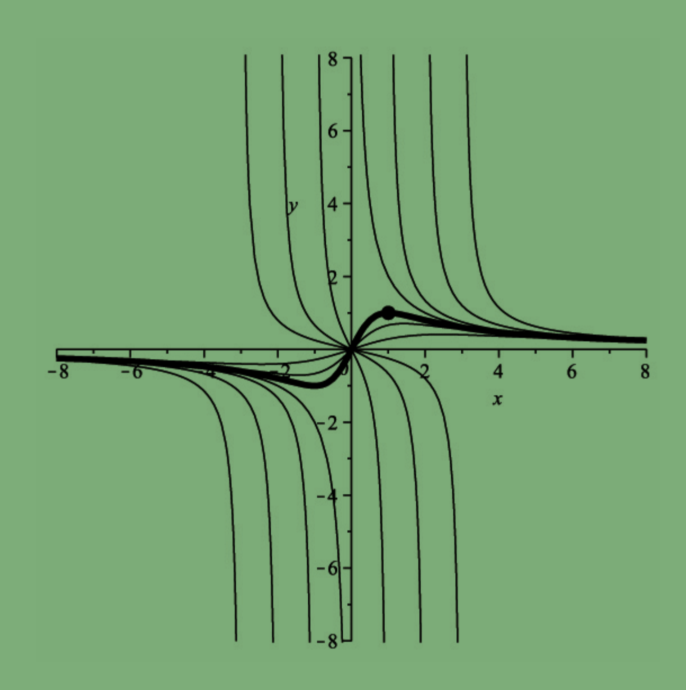
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN (I)

ALGUNOS MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

por

M. ESTHER PATIÑO RODRÍGUEZ
PEDRO GALÁN DEL SASTRE



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE ARQUITECTURA DE MADRID*

3-88-01

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN I

ALGUNOS MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

por

M. ESTHER PATIÑO RODRÍGUEZ
PEDRO GALÁN DEL SASTRE

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-88-01

C U A D E R N O S
D E L I N S T I T U T O
J U A N D E H E R R E R A

NUMERACIÓN

2 Área
51 Autor
09 Ordinal de cuaderno (del autor)

TEMAS

1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN
0 VARIOS

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden I.
Algunos métodos de resolución.

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Almudena Gil Sancho.
CUADERNO 376.01 / 3-88-01
ISBN-13 (obra completa): 978-84-9728-426-4
ISBN-13: 978-84-9728-427-1
Depósito Legal: M-24078-2012

Índice general

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

1. Introducción

Un gran número de problemas geométricos, de fenómenos físicos, etc., pueden ser descritos a partir de relaciones en las que intervienen conceptos como las rectas tangentes, la velocidad, la aceleración (o en general, la variación de la variable de estudio). Así pues, la ley de enfriamiento de los cuerpos, problemas de dinámica poblacional, caída de cuerpos, sistemas masa-resote, problemas de fluidos, de elasticidad, entre otros, son ejemplos de este tipo de fenómenos físicos. Como ejemplo de problemas geométricos nos podemos plantear encontrar las ecuaciones que definan familias de curvas que cumplan unas determinadas propiedades geométricas, ya sean expresadas en términos de ortogonalidad o de otro tipo de condiciones en las que aparezca la derivada de una función en un punto.

Desde el punto de vista matemático, estas relaciones vienen descritas mediante ecuaciones que involucran una función incógnita, sus variables y sus derivadas; son las conocidas como ***ecuaciones diferenciales***. El estudio de la resolución de estas ecuaciones ha sido tratado por una gran cantidad de matemáticos: Bernoulli, Euler, Lagrange, Cauchy, ...

Mediante la aplicación de métodos analíticos se pretende encontrar una expresión explícita (o implícita) de la solución de una ecuación diferencial, pero esto no siempre es posible. Se hace necesario, entonces, un estudio cualitativo que permita obtener información sobre la existencia de soluciones, su unicidad, algunas propiedades de las soluciones, etc. En el caso de tener garantizada la existencia de una solución única, se podrán aplicar métodos numéricos para obtener una solución aproximada.

En este cuaderno nos centraremos en el estudio de las técnicas más comunes de resolución analítica para algunos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

1.1. Conceptos básicos

Definición 1.1 *Una* ***ecuación diferencial ordinaria*** **(E.D.O.)** *es una expresión que relaciona una función incógnita, $u(x)$, su variable independiente, x, y sus derivadas sucesivas $u'(x)$, $u''(x)$...., es decir, una expresión de la forma*

$$F(x, u(x), u'(x), ..., u^{(n)}(x)) = 0 \tag{1}$$

donde F es una función real definida en un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{n+2}$ y u es una función real de variable real.

Ejemplo 1.2 *Encontrar una función $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifique la ecuación*

$$u'(x)e^{u''(x)} - 2u'(x) - \operatorname{sen}(u(x)) = 0.$$

Para este ejemplo, la función $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ viene definida como

$$F(x, y, z, w)) = ze^w - 2z - \operatorname{sen} y.$$

Definición 1.3 *Si la función incógnita, u, tiene varias variables independientes la ecuación se llama* ***ecuación en derivadas parciales*** **(E.D.P.)**.

Ejemplo 1.4 *Encontrar una función $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

Cuando la derivada de orden superior aparece despejada en función de las $n+1$ variables restantes diremos que la ecuación está expresada en ***forma normal***. Esto es,

$$u^{(n)}(x) = f(x, u(x), ..., u^{(n-1)}(x));$$

por ejemplo, $u''(x) = u(x) - 6u'(x)$.

En cuanto a notación, se utiliza tanto la notación del símbolo prima, $(')$, es decir, $u'(x), u''(x), ...$, como la notación diferencial de Leibniz, $\dfrac{du}{dx}(x)$, $\dfrac{d^2u}{dx^2}(x), ...$

Ejemplo 1.5 *Las ecuaciones diferenciales* $u''(x) - u'(x) + 3 = 0$ *y* $\dfrac{d^2u}{dx^2}(x) - \dfrac{du}{dx}(x) + 3 = 0$ *son equivalentes.*

Definición 1.6 *Se llama* ***orden de una ecuación diferencial ordinaria*** *al mayor orden de la derivada que aparece en dicha ecuación.*

Ejemplo 1.7 *La ecuación diferencial $u'(x) + \operatorname{tg} x = 0$ es de primer orden y la ecuación diferencial $u'''(x) + u''(x) - \operatorname{sen} x = x$ es de tercer orden.*

Definición 1.8 *Diremos que la función $u : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es* ***solución*** *de la ecuación diferencial (1) en (a, b) si al sustituir $u(x)$ y sus derivadas en la ecuación, ésta se verifica.*

Ejemplo 1.9 *Las funciones $u(x) = \operatorname{sen} x$ y $u(x) = \cos(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden $u''(x) + u(x) = 0$.*

En efecto, si tomamos la función $u(x) = \operatorname{sen} x$, se tiene que $u'(x) = \cos x$ y $u''(x) = -\operatorname{sen} x$. Sustituyendo u'' y u en la ecuación dada en el ejemplo se tiene que

$$u''(x) + u(x) = -\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x = 0;$$

por tanto, $u(x) = \operatorname{sen} x$ es solución de la ecuación diferencial. De manera análoga se comprobaría que $u(x) = \cos x$ también es solución de esa misma ecuación diferencial.

Ejemplo 1.10 *Resolver la ecuación diferencial* $u'(x) = 2x$.

Tenemos que encontrar una función $u(x)$ cuya derivada sea $u'(x) = 2x$, es decir, una primitiva de la función $y(x) = 2x$. Para ello, basta con integrar en ambos lados de la ecuación diferencial, es decir,

$$\int u'(x)dx = \int 2xdx$$

obteniéndose como solución de la ecuación diferencial propuesta en este ejemplo, expresada de manera explícita,

$$u(x) = x^2 + c,$$

donde c es una constante arbitraria que proviene de la integración.

No siempre podremos determinar la solución de la ecuación diferencial de forma explícita y ésta vendrá dada en forma implícita mediante relaciones de la forma $h(x, u(x)) = 0$.

Ejemplo 1.11 *Las curvas definidas por la ecuación* $x^2 - y^2 = c$, *donde* c *es una constante arbitraria, son soluciones implícitas de la ecuación diferencial* $x - y(x)y'(x) = 0$.

Nótese que una ecuación diferencial puede tener más de una solución. En los ejemplos anteriores, 1.10 y 1.11, se observa que las soluciones dependen de una constante arbitraria, c.

Definición 1.12 *Dada una ecuación diferencial ordinaria de orden* n,

$$F(x, u(x), u'(x), ..., u^{(n)}(x)) = 0,$$

se llama ***solución general*** *de la* E.D.O. *a una familia* n*-paramétrica de funciones*

$$u(x) = G(x, c_1, c_2, ..., c_n) \tag{2}$$

donde $c_i \in \mathbb{R}\ \forall i = 1, 2 \ldots n$ *tales que* $u(x)$ *verifica la ecuación.*

Para la ecuación propuesta en el Ejemplo 1.10, $G(x, c) = x^2 + c$.

Ejemplo 1.13 *La familia biparamétrica definida como* $u(x) = G(x, c_1, c_2) = c_1e^x + c_2xe^x$ *es solución de la ecuación diferencial de segundo orden* $u''(x) - 2u'(x) + u(x) = 0$.

Derivamos dos veces la función $u(x)$ y obtenemos

$$\begin{aligned} u'(x) &= c_1e^x + c_2(1 + x)e^x, \\ u''(x) &= c_1e^x + c_2(2 + x)e^x. \end{aligned}$$

Por tanto, sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene que

$$u''(x) - 2u'(x) + u(x) = c_1e^x + c_2(2 + x)e^x - 2(c_1e^x + c_2(1 + x)e^x) + c_1e^x + c_2xe^x = 0.$$

En general, una ecuación diferencial ordinaria de orden n tiene como solución una familia n-paramétrica de curvas definida a partir de las funciones $u(x) = G(x, c_1, c_2, ..., c_n)$. De manera recíproca, para una familia n-paramétrica de curvas, $u(x) = G(x, c_1, c_2, ..., c_n)$, es posible encontrar la ecuación diferencial que defina a dicha familia sin más que derivar n veces la expresión (2) y eliminar los parámetros $c_1, c_2, \ldots c_n$.

Ejemplo 1.14 *Sea la familia biparamétrica de curvas definida por $u(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$. Obtener la ecuación diferencial que define dicha familia.*

Derivamos dos veces y obtenemos

$$\begin{aligned} u(x) &= c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x, \\ u'(x) &= c_1 \cos x - c_2 \operatorname{sen} x, \\ u''(x) &= -c_1 \operatorname{sen} x - c_2 \cos x. \end{aligned}$$

Es claro que la relación que existe entre $u(x)$ y sus derivadas es

$$u''(x) + u(x) = 0,$$

siendo ésta la ecuación diferencial que define la familia de curvas de este ejemplo.

Hemos visto, entonces, que la solución de una ecuación diferencial viene dada a partir de una familia de curvas, es decir, no es única. En algunas ocasiones interesa determinar una única solución, esto es, una única curva de la familia. Para ello se imponen una serie de condiciones sobre el valor de la función y sus derivadas en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Estas condiciones de la forma

$$\begin{cases} u(x_0) = \alpha_0, \\ u'(x_0) = \alpha_1, \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}, \end{cases} \tag{3}$$

donde $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$, reciben el nombre de ***condiciones iniciales***. De esta forma se determinarán, cuando esto sea posible, valores para los parámetros $c_1, c_2, \ldots c_n$ y por tanto, la solución será única. Puesto que hay que obtener el valor de n parámetros, es necesario imponer un número de condiciones iniciales igual al orden de la ecuación diferencial y así plantear un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, que son los valores de c_i.

Por ejemplo, para una ecuación diferencial de segundo orden, las condiciones iniciales vienen dadas por

$$\begin{cases} u(x_0) = \alpha_0, \\ u'(x_0) = \alpha_1, \end{cases}$$

es decir, de todas las curvas que pertenecen a la familia uniparamétrica solución de la ecuación, queremos la que pase por el punto (x_0, α_0) y cuya pendiente en dicho punto valga α_1.

Definición 1.15 *Llamaremos* ***solución particular*** *de la* E.D.O. *(1), u_p, a la que se obtiene dando valores concretos a las constantes c_i, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ de la solución general dada en (2).*

Ejemplo 1.16 *Dada la ecuación diferencial $u'(x) = 6x$, obtener su solución general y la solución particular que verifique la condición inicial $u(2) = 10$.*

La solución general se determina integrando; esto es,

$$\int u'(x)dx = \int 6xdx,$$

obteniéndose la familia uniparamétrica definida por

$$u(x) = 3x^2 + c.$$

Imponiendo ahora la condición inicial $u(2) = 10$,

$$10 = u(2) = 12 + c$$

se tiene para c el valor $c = -2$. La solución particular viene dada entonces por la función

$$u(x) = 3x^2 - 2.$$

La Figura 1 muestra las gráficas de algunas curvas que forman la familia uniparamétrica que define la solución general de la ecuación diferencial y entre ellas, la gráfica de la solución particular buscada.

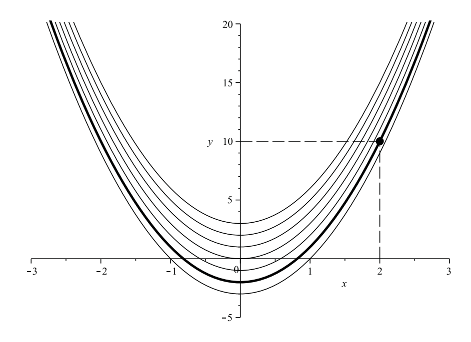


Figura 1: Familia uniparamétrica de soluciones y solución particular.

Definición 1.17 *Una función u solución de una ecuación diferencial ordinaria que no se obtiene como solución particular se le denomina* ***solución singular****.*

La ecuación diferencial $u'(x) = u(x)^{1/2}$ tiene como solución general $u(x) = \left(\frac{x}{2} + C\right)^2$, pero $u(x) = 0$ es también solución y no se obtiene como caso particular de la solución general; es, por tanto, una solución singular.

Definición 1.18 *Se define un* ***problema de valores iniciales*** **(P.V.I.)** *o* ***problema de Cauchy*** *al problema de la forma*

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x, u(x), u'(x), ..., u^{(n)}(x)) = 0, \\ u(x_0) = \alpha_0, \\ u'(x_0) = \alpha_1, \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}, \end{array} \right. \tag{4}$$

donde $\alpha_0,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.19 *Dada la ecuación diferencial de segundo orden $u''(x) + u(x) = 0$ que tiene como solución general $u(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$, resolver el problema de valor inicial dado por*

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) = 0, \\ u(0) = 2, \\ u'(0) = 1. \end{cases}$$

Para obtener la solución particular basta tomar la solución general e imponer las condiciones de valor inicial. Dado que

$$\begin{aligned} u(x) &= c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x, \\ u'(x) &= c_1 \cos x - c_2 \operatorname{sen} x, \end{aligned}$$

tenemos que resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2 &= u(0) = c_1 \operatorname{sen}(0) + c_2 \cos(0) = c_2, \\ 1 &= u'(0) = c_1 \cos(0) - c_2 \operatorname{sen}(0) = c_1, \end{aligned}$$

y, por tanto, la solución particular viene dada por la función

$$u(c) = \operatorname{sen} x + 2\cos x.$$

2. Problema de valor inicial de primer orden. Teorema de existencia y unicidad

En lo que sigue estudiaremos únicamente algos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Definición 2.1 *Una **ecuación diferencial de primer orden** es de la forma*

$$F(x, u(x), u'(x)) = 0.$$

Nos centraremos en las ecuaciones diferenciales que se puedan expresar en forma normal, $u'(x) = f(x, u(x))$, para las que también es frecuente utilizar la notación

$$u' = f(x, u), \quad \frac{du}{dx}(x) = f(x, u(x)), \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{ó} \quad dy = f(x, y)dx.$$

Como ya vimos en la sección anterior, la solución general de una ecuación de primer orden es una familia uniparamétrica de curvas de $\mathbb{R}^2$. Para determinar una solución particular es preciso tener una condición inicial. Por tanto, el ***problema de valor inicial de primer orden*** definido en (4) viene formulado ahora como:

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)), \\ u(x_0) = \alpha_0. \end{cases} \tag{5}$$

Al imponer una condición inicial en este P.V.I., se pretende encontrar la única solución que lo verifique, pero esto no siempre es posible. Veamos algunos ejemplos que ilustran este hecho.

Ejemplo 2.2 *Consideremos el* P.V.I.

$$\begin{cases} u'(x) = 4xe^{x^2}, \\ u(0) = 3. \end{cases} \tag{6}$$

La ecuación diferencial tiene como solución general $u(x) = 2e^{x^2} + c$. Imponiendo la condición inicial $3 = u(0) = 2 + c$ se obtiene para c el valor $c = 1$ por lo que la única solución del problema de valor inicial viene dada por

$$u(x) = 2e^{x^2} + 1.$$

Ejemplo 2.3 *Sea el* P.V.I.

$$\begin{cases} u'(x) = \sqrt[3]{u(x)}, \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

La ecuación diferencial tiene como solución general $u(x) = \left(\frac{2}{3}x + c\right)^{3/2}$. Imponiendo la condición inicial obtenemos para c el valor $c = 0$ por lo que $u(x) = \left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2}$. Pero la función $u(x) = 0$ también verifica el P.V.I. como se puede comprobar de manera sencilla, por lo que en este caso, no existe solución única.

Ejemplo 2.4 *Consideremos ahora el* P.V.I.

$$\begin{cases} xu'(x) = u(x), \\ u(0) = 2. \end{cases} \tag{8}$$

La solución general de la ecuación diferencial se expresa como $u(x) = cx$. Al imponer la condición inicial llegamos al absurdo $2 = u(0) = c \cdot 0 = 0$, de modo que este P.V.I. no tiene solución.

Por tanto, antes de resolver un P.V.I. es conveniente saber si existe solución, y en caso afirmativo, si ésta es la única solución del problema. Veamos entonces un resultado que da condiciones suficientes para garantizar la existencia y unicidad de la solución del problema de valor inicial para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Teorema 2.5 ***(Teorema de Picard)***
Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función definida en un rectángulo

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b,\ c < y < d\right\}$$

*y sea $(x_0, y_0) \in D$. Si f y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en D, entonces existe algún intervalo centrado en x_0, $I_0 = (x_0 - h, x_0 + h)$ con $h > 0$, $I_0 \subset (a, b)$ y una **única función** u definida en I_0 que es solución del problema de valor inicial*

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)), \\ u(x_0) = \alpha_0. \end{cases} \tag{9}$$

Observación 2.6 *En el ejemplo anterior, donde $f(x, y) = \dfrac{y}{x}$, la derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{1}{x}$ no es continua en los puntos de la forma $(0, y)$.*

3. Algunos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Métodos de resolución

Existen distintos tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden. El método de resolución dependerá del tipo de ecuación que se tenga. En este capítulo estudiaremos algunos tipos de estas ecuaciones y técnicas para su resolución.

Comenzaremos con la más simple de todas: ecuaciones diferenciales de primer orden de variables separables.

3.1. Ecuaciones diferenciales de variables separables

Un caso particular de estas ecuaciones son las ecuaciones del tipo

$$u'(x) = g(x).$$

Estas ecuaciones se pueden resolver directamente mediante integración, es decir, su solución general se calcula como

$$u(x) = \int u'(x)dx = \int g(x)dx + c.$$

Ejemplo 3.1 *Resolver* $u'(x) = x^2$.

$$u(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c.$$

En general, diremos que una ecuación de primer orden $u'(x) = f(x, u(x))$ es de ***variables separables*** cuando $f(x, y)$ se pueda escribir como producto de dos funciones, una dependiente de x y otra de y, $f(x, y) = h(x)g(y)$, es decir,

$$u'(x) = h(x)g(u(x)). \tag{10}$$

Suponiendo que $g(u(x)) \neq 0 \ \ \forall x$, de la ecuación (10) se tiene que

$$h(x) = \frac{u'(x)}{g(u(x))}, \tag{11}$$

expresión en la que aparecen separadas las variables, x y u, una a cada lado de la igualdad. Integrando

$$\int h(x)dx = \int \frac{u'(x)}{g(u(x))}dx \tag{12}$$

y utilizando el cambio de variable dado por

$$\begin{cases} t = u(x) \\ dt = u'(x)dx \end{cases} \tag{13}$$

la igualdad (12) quedaría

$$\int h(x)dx = \int \frac{dt}{g(t)}.$$

Tras integrar y deshacer el cambio de variable, se obtiene la solución general $u(x)$, ya sea de manera explícita o implícita.

Ejemplo 3.2 *Resolver la ecuación*

$$u'(x) + \frac{1 + u(x)^2}{x} = 0.$$

Separamos variables y la ecuación queda expresada como

$$\frac{u'(x)}{1 + u(x)^2} = -\frac{1}{x}.$$

Integramos en ambos lados de la igualdad,

$$\int \frac{u'(x)}{1 + u(x)^2} dx = -\int \frac{1}{x} dx.$$

Para resolver la integral del lado izquierdo aplicamos el cambio de variable dado por (13),

$$\int \frac{u'(x)}{1 + u(x)^2} = \int \frac{1}{1 + t^2} dt = \operatorname{arc\,tg} t = \operatorname{arc\,tg} u(x).$$

En el lado derecho de la igualdad, de manera inmediata, se obtiene que

$$-\int \frac{1}{x} dx = -\log x + c = -\log x + \log K = \log \frac{K}{x}$$

donde $c = \log K$, y, finalmente obtenemos la solución general de la ecuación, que expresada en forma implícita es

$$\operatorname{arc\,tg} u(x) = \log \frac{K}{x}$$

y, de manera explícita,

$$u(x) = \operatorname{tg}\left(\log \frac{K}{x}\right).$$

Ejemplo 3.3 *Resolver el* P.V.I.

$$\begin{cases} u'(x) = (1 + x^2)(1 + u(x)), \\ u(0) = 2. \end{cases}$$

En primer lugar, obtendremos la solución general de la ecuación diferencial. Para ello, escribimos la ecuación como

$$\frac{u'(x)}{1 + u(x)} = 1 + x^2$$

e integramos en ambos lados de la igualdad,

$$\int \frac{u'(x)}{1 + u(x)} dx = \int (1 + x^2) dx. \tag{14}$$

La integral del lado derecho de la igualdad es inmediata,

$$\int (1+x^2)dx = x + \frac{x^3}{3} + c \tag{15}$$

y la integral del lado izquierdo se puede resolver aplicando el cambio de variable dado en (13):

$$\int \frac{u'(x)}{1+u(x)}dx = \int \frac{1}{1+t}dt = \log(1+t) = \log(1+u(x)). \tag{16}$$

Igualando, entonces, (15) y (16)

$$x + \frac{x^3}{3} + c = \log(1+u(x))$$

y aplicando la función exponencial en ambos lados llegamos a

$$e^{x+\frac{x^3}{3}+c} = e^{\log(1+u(x))},$$

esto es,

$$e^{x+\frac{x^3}{3}}e^c = (1+u(x)).$$

Puesto que e^c es una constante arbitraria, la denotamos por $K = e^c$, y ahora despejando $u(x)$, se obtiene como solución general:

$$u(x) = Ke^{x+\frac{x^3}{3}} - 1.$$

Para determinar la solución particular del P.V.I. sustituimos la condición inicial $u(0) = 2$ en la expresión de la solución general; esto es,

$$2 = u(0) = K - 1$$

de modo que $K = 3$ obteniéndose, entonces, que la solución del P.V.I. es

$$u(x) = 3e^{x+\frac{x^3}{3}} - 1.$$

Ejemplo 3.4 *Resolver la ecuación* $(1+x)dy - ydx = 0$.

Supongamos que la variable dependiente es y, ya que no aparece en la ecuación nada que lo indique. Escribiendola como

$$\frac{dx}{1+x} = \frac{dy}{y}$$

e integrando se obtiene

$$\log(1+x) + c = \log y.$$

Despejando se obtiene como solución general

$$y = K(1+x),$$

donde hemos llamado $c = \log K$.

Ejercicios propuestos

1. $(x^2+4)v'(x) = xv(x)$ Solución: $v(x) = C\sqrt{x^2+4}$

2. $xu(x) + e^{-x^2}(u(x)^2-1)u'(x) = 0$ Solución: $\dfrac{u(x)^2}{2} - \log u(x) = -\frac{1}{2}e^{x^2} + C$

3. $yy' = e^x$ Solución: $\dfrac{y^2}{2} = e^x + C$

4. $2u(x)u'(x) + \operatorname{sen}(x) = 0$ Solución: $u(x)^2 = \cos x + C$

3.2. Ecuaciones diferenciales homogéneas

Recordemos, en primer lugar, cómo se define una función homogénea.

Definición 3.5 *Una función real de dos variables reales $f(x,y)$ es **homogénea de grado n** cuando verifica que*

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Definición 3.6 *Las ecuaciones diferenciales del tipo $u'(x) = f(x,u(x))$ donde f es una función homogénea de grado cero se llaman **ecuaciones diferenciales homogéneas**.*

Ejemplo 3.7 *La función $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ es homogénea de grado cero.*

En efecto,

$$f(tx,ty) = \frac{t^2x^2 - t^2y^2}{t^2x^2+t^2y^2} = \frac{t^2(x^2-y^2)}{t^2(x^2+y^2)} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = f(x,y).$$

Propiedad 3.8 *Para toda función f homogénea de grado cero existe una función g real de variable real tal que*

$$f(x,y) = g(\frac{y}{x}).$$

Ejemplo 3.9 *Para la función del ejemplo anterior,*

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Observación 3.10 *Para una ecuación diferencial homogénea existe una función g real de variable real tal que*

$$u'(x) = f(x,u(x)) = g\left(\frac{u(x)}{x}\right). \tag{17}$$

Nótese que haciendo el cambio de variable $v(x) = \dfrac{u(x)}{x}$ se tiene que $u'(x) = xv'(x) + v(x)$, y (17) se expresa como

$$xv'(x) + v(x) = g(v(x)).$$

Es decir,

$$v'(x) = \frac{1}{x}\left(g(v(x)) - v(x)\right),$$

siendo ésta una ecuación de variables separables.

Ejemplo 3.11 *Resolver la ecuación diferencial*

$$u'(x) = \frac{u(x)}{x} + 1.$$

Veamos en primer lugar que se trata de una ecuación diferencial homogénea. La función $f(x, y)$ asociada a dicha ecuación viene dada por

$$f(x, y) = \frac{y}{x} + 1,$$

de modo que

$$f(tx, ty) = \frac{ty}{tx} + 1 = \frac{y}{x} + 1 = f(x, y).$$

Entonces, $f(x, y)$ es una función homogénea de grado 0 y, por tanto, la ecuación diferencial dada es una ecuación diferencial homogénea. Aplicando el cambio de variable $v(x) = \dfrac{u(x)}{x}$, la ecuación queda

$$xv'(x) + v(x) = v(x) + 1,$$

y por tanto,

$$v'(x) = \frac{1}{x}.$$

Integrando se obtiene $v(x) = \log x + c$ y tras deshacer el cambio de variable, la solución general de la ecuación viene dada por

$$u(x) = x\log(Kx),$$

donde, de nuevo, $c = \log K$.

Ejemplo 3.12 *Resolver la ecuación diferencial*

$$(x^2 - u(x)^2) + 3xu(x)u'(x) = 0.$$

Escribiendo la ecuación de la forma $u'(x) = f(x, u(x))$ resulta $u'(x) = \dfrac{u(x)^2 - x^2}{3xu(x)}$. Se comprueba fácilmente que se trata de una ecuación diferencial homogénea ya que la función

$f(x,y)$ asociada a dicha ecuación, $f(x,y) = \dfrac{y^2 - x^2}{3xy}$, es una función homogénea de grado 0. Por tanto, utilizando el cambio de variable $v(x) = \dfrac{u(x)}{x}$, la ecuación queda escrita como

$$v(x) + xv'(x) = \frac{v(x)^2 - 1}{3v(x)}.$$

Operando se llega a la ecuación

$$v'(x) = -\frac{2v(x)^2 + 1}{3xv(x)};$$

separando variables e integrando tenemos la siguiente igualdad

$$\int \frac{3v(x)v'(x)}{2v(x)^2 + 1} dx = \int -\frac{1}{x} dx.$$

Para resolver la integral del lado izquierdo de la igualdad aplicamos el cambio de variable

$$\begin{cases} t = v(x), \\ dt = v'(x)dx, \end{cases} \tag{18}$$

es decir,

$$\int \frac{3v(x)v'(x)}{2v(x)^2 + 1} dx = \int \frac{3t}{2t^2 + 1} dt = \frac{3}{4} \log(2t^2 + 1) = \log(2v(x)^2 + 1)^{3/4}.$$

La integral del lado derecho es inmediata,

$$\int -\frac{1}{x} dx = -\log x + c = \log \frac{K}{x},$$

con $c = \log K$. Igualando ambos resultados,

$$\log(2v(x)^2 + 1)^{3/4} = \log \frac{K}{x}.$$

Deshaciendo el primer cambio de variable y operando llegamos a la solución general de la ecuación diferencial:

$$u(x) = \pm\sqrt{\frac{Cx^{2/3} - x^2}{2}},$$

con $C = K^{4/3}$.

Ejemplo 3.13 *Resolver la ecuación diferencial*

$$(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0.$$

Esta ecuación es homogénea; para verlo basta expresarla como

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \frac{x^2 + y(x)^2}{xy(x) - x^2}.$$

La función $f(x, y)$ asociada la la ecuación diferencial es, en este caso, $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{xy - x^2}$, siendo ésta una función homogénea de grado 0. Mediante el cambio de variable $v(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ obtenemos que $y'(x) = v(x) + xv'(x)$ y la ecuación se escribe como

$$v(x) + xv'(x) = \frac{1 + v(x)^2}{v(x) - 1}.$$

Tras operar queda

$$\frac{(v(x) - 1)v'(x)}{v(x) + 1} = \frac{1}{x};$$

e integrando tenemos

$$\int \frac{(v(x) - 1)v'(x)}{v(x) + 1} dx = \int \frac{1}{x} dx.$$

La integral del lado izquierdo se resuelve aplicando el cambio de variable $t = v(x)$ (véase expresión (18)):

$$\int \frac{t - 1}{t + 1} dt = t - 2\log(1 + t) = v(x) - 2\log(1 + v(x)).$$

La integral del lado derecho es inmediata:

$$\int \frac{1}{x} dx = \log(Kx).$$

Igualando ambos resultados tenemos

$$v(x) - 2\log(1 + v(x)) = \log(Kx).$$

Deshacemos el cambio de variable inicial y operamos para obtener la solución general de la ecuación diferencial que, en forma implícita, es

$$K(x + y)^2 = xe^{y/x}.$$

Ejercicios propuestos

Comprobar que las siguientes ecuaciones son homogéneas y resolverlas:

1. $u'(x) = \dfrac{u(x)^3}{x^3}$ Solución: $u^2(x) = \dfrac{x^2}{Kx^2+1}$

2. $(x^3 - xy^2)dx - x^2ydy = 0$ Solución: $y^2 = \dfrac{K+x^4}{2x^2}$

3. $xu'(x) = \sqrt{x^2 - u(x)^2} + u(x)$ Solución: $u(x) = x\,\mathrm{sen}(\log(Kx))$

4. $y' = \dfrac{xy}{x^2-y^2}$ Solución: $\dfrac{x^2}{2y^2} + \log y = C$

3.3. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Definición 3.14 *Una **ecuación diferencial lineal de primer orden** es aquella que se puede expresar en la forma*

$$a_1(x)u'(x) + a_0(x)u(x) = f(x) \tag{19}$$

*donde a_0, a_1, $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones reales definidas en el intervalo abierto I y $a_1(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$. A las funciones $a_0(x), a_1(x)$ se les denomina **coeficientes de la ecuación**. Cuando la función $f(x) \equiv 0$ diremos que la ecuación diferencial lineal es **homogénea** y cuando $f(x) \not\equiv 0$ diremos que es **completa**.*

Una expresión equivalente, pero en forma normal, es

$$u'(x) = a(x)u(x) + b(x). \tag{20}$$

Proposición 3.15 *Sea u_P una solución particular de la ecuación completa $u'(x) = a(x)u(x) + b(x)$, entonces cualquier solución u de la ecuación completa se puede escribir como $u = u_P + u_H$ donde u_H es una solución de la ecuación homogénea asociada.*

Demostración.
Sea u una solución cualquiera de dicha ecuación completa (20). Definimos

$$u_H(x) = u(x) - u_P(x).$$

Derivando, $u_H'(x) = u'(x) - u_P'(x)$, y como $u(x)$ y $u_P(x)$ son soluciones de (20),

$$u_H'(x) = a(x)u(x) + b(x) - a(x)u_P(x) - b(x) = a(x)(u(x) - u_P(x)) = a(x)u_H(x),$$

lo que prueba que $u_H(x)$ es solución de la ecuación diferencial homogénea asociada. Queda probado, entonces, que cualquier solución de la ecuación (20) se puede expresar como $u = u_P + u_H$. ■

En virtud de este resultado, nuestro objetivo será encontrar la solución general de la ecuación homogénea asociada y una solución particular de la ecuación completa.

La ecuación homogénea asociada a la ecuación (20)

$$u'_H(x) = a(x)u_H(x) \tag{21}$$

es una ecuación de variables separables, de modo que su resolución es inmediata. Esto es,

$$\int \frac{u'_H(x)}{u_H(x)}dx = \int a(x)dx. \tag{22}$$

La integral del lado izquierdo se resuelve fácilmente aplicando el cambio de variable

$$\begin{cases} u_H(x) = t \\ u'_H(x)dx = dt \end{cases}$$

de modo que

$$\int \frac{u'_H(x)}{u_H(x)}dx = \int \frac{1}{t}dt = \log t = \log u_H(x).$$

Si ahora consideramos una función $A(x)$ tal que $A'(x) = a(x)$, la integral del lado derecho será

$$\int a(x)dx = A(x) + c$$

y, por tanto, la expresión (22) queda

$$\log u_H(x) = A(x) + c,$$

o, de manera equivalente,

$$u_H(x) = e^{A(x)+c} = Ke^{A(x)} \tag{23}$$

donde hemos llamado $K = e^c$.

Para encontrar una solución particular de la ecuación completa utilizaremos el ***método de variación de las constantes*** o ***método de Lagrange***. Con este método buscamos una función $K(x)$ tal que

$$u_P(x) = K(x)e^{A(x)} \tag{24}$$

sea solución de la ecuación completa.

En efecto, derivando la expresión anterior,

$$u'_P(x) = K'(x)e^{A(x)} + K(x)A'(x)e^{A(x)} = K'(x)e^{A(x)} + K(x)a(x)e^{A(x)}. \tag{25}$$

Por otro lado, sustituyendo la expresión (24) en la ecuación (20)

$$u'_P(x) = a(x)K(x)e^{A(x)} + b(x). \tag{26}$$

Igualando (25) y (26)

$$K'(x)e^{A(x)} + K(x)a(x)e^{A(x)} = a(x)K(x)e^{A(x)} + b(x)$$

y reduciendo términos,

$$K'(x)e^{A(x)} = b(x),$$

es decir,

$$K'(x) = e^{-A(x)}b(x),$$

de donde,

$$K(x) = \int e^{-A(x)}b(x)dx + C.$$

Sustituyendo, ahora, en la expresión (24), la solución general de la ecuación completa se podrá expresar como

$$u(x) = e^{A(x)}\left(C + \int e^{-A(x)}b(x)dx\right), \tag{27}$$

o bien, de manera equivalente,

$$u(x) = Ce^{A(x)} + e^{A(x)}\int e^{-A(x)}b(x)dx. \tag{28}$$

Nótese que la solución $u(x)$ viene expresada como suma de la solución general de la ecuación homogénea asociada, $u_H(x) = Ce^{A(x)}$, más un término que corresponde a una solución particular de la ecuación diferencial completa (como se prueba fácilmente), $u_P(x) = e^{A(x)}\int e^{-A(x)}b(x)dx$.

Ejemplo 3.16 *Resolver la ecuación diferencial*

$$v'(t) = 8tv(t).$$

Se trata de una ecuación diferencial lineal homogénea. Separando variables,

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = 8t.$$

Integrando en ambos lados de la igualdad, se obtiene que

$$\log v(t) = 4t^2 + c$$

y por tanto, la solución general de la ecuación es

$$v(t) = Ke^{4t^2}.$$

Ejemplo 3.17 *Resolver la ecuación diferencial*

$$u'(x) = (3x^2 + 1)u(x) + 9x^2 + 3.$$

En este caso, tenemos una ecuación diferencial lineal completa donde, según la notación utilizada en (20), $a(x) = 3x^2 + 1$ y $b(x) = 9x^2 + 3$. En primer lugar, resolvemos la ecuación homogénea $u'_H(x) = (3x^2 + 1)u_H(x)$;

$$\int \frac{u'_H(x)}{u_H(x)}dx = \int (3x^2 + 1)dx \Leftrightarrow \log(u_H(x)) = x^3 + x + c,$$

es decir,

$$u_H(x) = Ke^{x^3+x}.$$

A continuación, aplicamos el *método de variación de las constantes* para obtener la solución particular de la ecuación completa. Para ello, como ya se explicó anteriormente, consideramos la función
$$u_P(x) = K(x)e^{x^3+x}.$$
Derivando,
$$u_P'(x) = K'(x)e^{x^3+x} + K(x)(3x^2+1)e^{x^3+x}.$$
Por otro lado,
$$u_P'(x) = (3x^2+1)u_P(x) + 9x^2 + 3 = (3x^2+1)K(x)e^{x^3+x} + 9x^2 + 3,$$
e igualando ambas expresiones se obtiene
$$K'(x)e^{x^3+x} + K(x)(3x^2+1)e^{x^3+x} = (3x^2+1)K(x)e^{x^3+x} + 9x^2 + 3,$$
y por tanto,
$$K'(x) = (9x^2+3)e^{-(x^3+x)}.$$
Integrando,
$$K(x) = -3e^{-(x^3+x)} + C$$
de modo que la solución general de la ecuación diferencial lineal completa, expresada en la forma dada por (27), es
$$u(x) = (-3e^{-(x^3+x)} + C)e^{x^3+x} = -3 + Ce^{x^3+x}$$
que se corresponde con lo que se afirma en la Proposición 3.15, $u(x) = u_H(x) + u_P(x)$, siendo $u_H(x) = Ce^{x^3+x}$ y $u_P(x) = -3$.

Ejemplo 3.18 *Resolver el problema de valor inicial*
$$\begin{cases} y' - \dfrac{y}{x} - x^2 + 1 = 0, \\ y(1) = 3/2. \end{cases}$$

Resolvemos la ecuación homogénea asociada, $y_H'(x) - \dfrac{y_H(x)}{x} = 0$. Para ello integramos en ambos lados de la igualdad
$$\frac{y_H'(x)}{y_H(x)} = \frac{1}{x},$$
obteniendo
$$\log y_H(x) = \log x + c = \log(Kx),$$
de modo que
$$y_H(x) = Kx.$$
Buscamos la solución de la completa procediendo de manera análoga al ejemplo anterior: suponemos que
$$y_P(x) = K(x)x$$

con lo que llegamos a

$$K'(x) = x - \frac{1}{x}$$

cuya integración da como resultado

$$K(x) = \frac{x^2}{2} - \log x + C$$

y por tanto

$$y(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \log x + C\right) x = \frac{x^3}{2} - x \log x + Cx$$

donde se puede observar de nuevo la estructura $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$ con $y_H(x) = Cx$ e $y_P(x) = \frac{x^3}{2} - x \log x$.

Resolvemos ahora el problema de valor inicial para la condición $y(1) = 3/2$,

$$\frac{3}{2} = y(1) = \frac{1}{2} + C,$$

y, tras despejar, se obtiene que $C = 1$. Por tanto, la solución particular de este P.V.I. es

$$y(x) = \frac{x^3}{2} - x \log x + x.$$

En la Figura 2 se muestra la representación gráfica de algunas curvas solución de la ecuación diferencial resuelta en este ejemplo así como la solución particular del P.V.I.

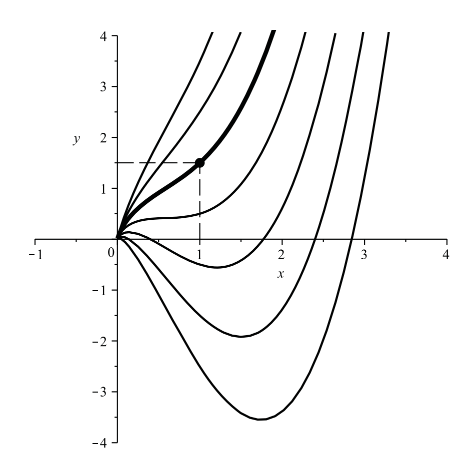


Figura 2: Familia uniparamétrica de soluciones y solución particular.

Ejercicios propuestos

Resolver las siguientes ecuaciones y problemas de valor inicial:

1. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ Solución: $y = x^2 e^{-x^2} + Ce^{-x^2}$

2. $\begin{cases} y' + 3y = e^x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ Solución: $y = \frac{1}{4}e^x + \frac{3}{4}e^{-3x}$

3. $\begin{cases} u'(x)\cos^2 x + u(x) = \operatorname{tg} x \\ u(\pi/4) = 2 \end{cases}$ Solución: $u(x) = \operatorname{tg} x - 1 + 2e^{1-\operatorname{tg} x}$

4. $xy' + 2y = \operatorname{sen} x$ Solución: $y = \dfrac{\operatorname{sen} x - x\cos x + C}{x^2}$

3.4. Ecuaciones diferenciales de Bernoulli

Definición 3.19 *Una ecuación diferencial es una* ***ecuación diferencial de Bernoulli*** *si puede expresarse en la forma*

$$u'(x) = a(x)u(x) + b(x)u(x)^n \tag{29}$$

donde $a(x), b(x) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *son funciones reales definidas en el intervalo abierto* I *y* $n \in \mathbb{R}$, $n \neq 0, 1$.

Observación 3.20 *En los casos* $n = 0$ *y* $n = 1$ *la ecuación de Bernoulli es una ecuación diferencial lineal.*

Para su resolución, aplicando el cambio de variable $v(x) = u(x)^{1-n}$ la ecuación (29) se transforma en una ecuación diferencial lineal. En efecto, si $v(x) = u(x)^{1-n}$ entonces,

$$v'(x) = (1-n)u(x)^{-n}u'(x) = (1-n)\frac{u'(x)}{u(x)^n}. \tag{30}$$

Si dividimos la expresión (29) por $u(x)^n$, tenemos que

$$\frac{u'(x)}{u(x)^n} = a(x)u(x)^{1-n} + b(x).$$

Sustituyendo (30) en la expresión anterior y operando llegamos a

$$v'(x) = (1-n)a(x)v(x) + (1-n)b(x),$$

que es una ecuación diferencial lineal.

Ejemplo 3.21 *Resolver la ecuación*

$$y' + xy = \frac{x}{y^3}.$$

Si escribimos la ecuación como $y' = -xy + \dfrac{x}{y^3}$ observamos que es una ecuación de tipo Bernoulli con $n = -3$, $a(x) = -x$ y $b(x) = x$ (véase expresión (29)). Por tanto, el cambio adecuado es $v(x) = y(x)^4$, de modo que $v'(x) = 4y(x)^3y'(x)$. Mediante este cambio la ecuación inicial queda expresada, en función de esta nueva variable, como

$$v'(x) = -4xv(x) + 4x$$

que es una ecuación diferencial lineal completa. Resolvemos primero la ecuación homogénea,

$$v'_H(x) = -4xv_H(x)$$

y llegamos a que

$$v_H(x) = Ke^{-2x^2}.$$

Aplicamos a continuación el *método de variación de las constantes*, es decir, consideramos $v_P(x) = K(x)e^{-2x^2}$. Obviando los pasos intermedios, se llega a

$$K'(x) = 4xe^{2x^2}$$

e, integrando,

$$K(x) = e^{2x^2} + C.$$

Con esto,

$$v(x) = (e^{2x^2} + C)e^{-2x^2} = 1 + Ce^{-2x^2}$$

y deshaciendo el cambio tenemos la solución general de la ecuación:

$$y^4(x) = 1 + Ce^{-2x^2},$$

o, de manera equivalente, escrita en forma explícita,

$$y(x) = \pm\sqrt[4]{1 + Ce^{-2x^2}}.$$

Ejemplo 3.22 *Resolver la ecuación diferencial*

$$xy' + y = y^2 \log x.$$

En este caso se trata de una ecuación de Bernoulli para $n = 2$, por lo que el cambio de variable adecuado es $v(x) = y(x)^{-1}$, con el que se tiene que $v'(x) = -y(x)^{-2}y'(x)$. Aplicando dicho cambio, la ecuación queda:

$$-xv'(x) + v(x) = \log x,$$

que es una ecuación diferencial lineal. La ecuación homogénea asociada $-xv'_H(x)+v_H(x) = 0$ tiene como solución general

$$v_H(x) = Kx.$$

Aplicando el *método de Lagrange*, es decir, considerando $v_P(x) = K(x)x$, llegamos a

$$K'(x) = -\frac{\log x}{x^2}$$

de cuya integración resulta que

$$K(x) = \frac{\log x}{x} + \frac{1}{x} + C.$$

La solución general de la ecuación completa es, por tanto,

$$v(x) = \log x + 1 + Cx$$

y tras deshacer el cambio llegamos a la expresión de la solución general de la ecuación de Bernoulli propuesta en este ejemplo:

$$y(x) = \frac{1}{1 + \log x + Cx}.$$

Ejercicios propuestos

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de Bernoulli:

1. $u'(x) + xu(x)(1-x^2)^{-1} = x\sqrt{u(x)}$ Solución: $u(x) = \left(\frac{1}{3}(x^2-1) + C(1-x^2)^{1/4}\right)^2$

2. $x^2y' + 2xy - y^3 = 0$ Solución: $y^2 = \frac{5x}{2 + Cx^5}$

3. $y' = y - 2y^2$ Solución: $y = (2 + Ce^{-x})^{-1}$

4. $2xu(x)u'(x) + (1+x)u(x)^2 = e^x$ Solución: $u(x)^2 = \frac{1}{2x}\left(e^x + Ce^{-x}\right)$

NOTAS

NOTAS

CUADERNO



Cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

